<u>Esercitazione 17 dicembre 2015</u>
Matematica Applicata
Ingegneria Biomedica

Patricia Díaz de Alba

1. Si consideri il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{2}h[f(x_k, \eta_k) + f(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k))]$$

   Si dica, motivando la risposta, se è un metodo monostep o multistep, esplicito o implicito, si studi la stabilità, la consistenza e la convergenza. Infine, posto $h = \frac{1}{2}$, si applichi tale metodo al seguente problema di Cauchy per approssimare la sua soluzione nel punto $x = 1$

$$\begin{cases} y' = -xy, \quad x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Classificare la seguente formula alle differenze finite per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha h}{3}[f(x_k, \eta_k) + 3f(x_k + \frac{\alpha h}{3}, \eta_k + \frac{\alpha h}{3} f(x_k, \eta_k))] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

   e studiarne la convergenza e l'ordine al variare del parametro reale α.

3. Dire per quale coppia di valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è contemporaneamente stabile, convergente e del second'ordine.

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha + 2}{\beta - 1}h\Big[f(x_k, \eta_k) + f\Big(x_k + \frac{1}{2}h, \eta_k + \frac{1}{2}hf(x_k, \eta_k)\Big)\Big]$$

   Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile.

$$\eta_{k+1} = (1 + \gamma)\eta_k + \Big(\frac{\gamma}{2} + \frac{3}{4}\Big)\eta_{k-1} + h[(1 + \gamma^2)f(x_k, \eta_k) + (\gamma - 1)f(x_{k-1}, \eta_{k-1})]$$

4. Si consideri il seguente schema alle differenze finite dove α, β sono due parametri reali positivi

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha + 2}[f(x_k, \eta_k) + 2f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta hf(x_k, \eta_k))]$$

   Si dica per quali valori di α e β il metodo è stabile, per quali è convergente del primo ordine e per quali è convergente del secondo ordine. Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile.

$$\eta_{k+1} = (1 + \gamma)\eta_k + h[(1 + \gamma^2)f(x_k, \eta_k) + (\gamma - 1)f(x_{k-1}, \eta_{k-1})]$$